

Partie A

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.

On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.

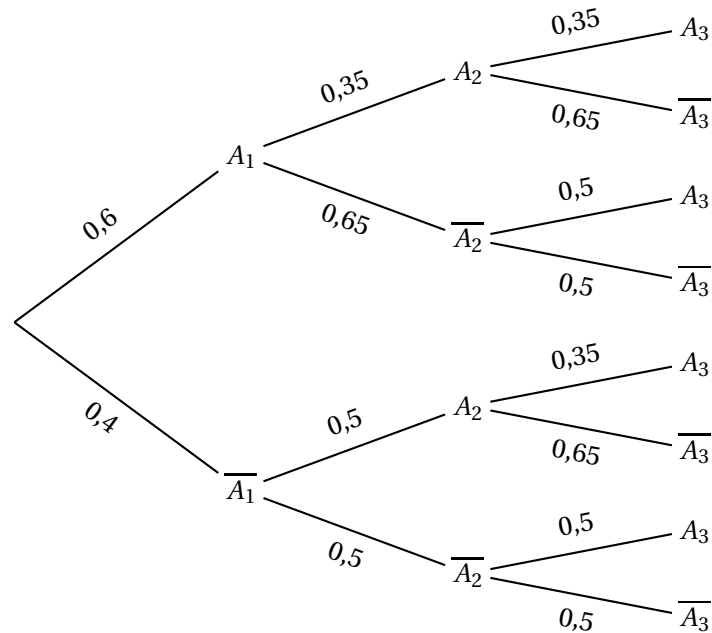
On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1^{er} tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2^e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3^e tir ».

1. D'après le texte, pour $k = 1$ ou $k = 2$, on a : $P_{A_k}(\overline{A_{k+1}}) = 0,65$ et $P_{\overline{A_k}}(A_{k+1}) = 0,5$.

Donc $P_{A_k}(A_{k+1}) = 0,35$ et $P_{\overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) = 0,5$.

On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. La probabilité que le joueur atteigne deux fois la cible au cours des trois tirs est :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 0,6 \times 0,35 \times 0,65 + 0,6 \times 0,65 \times 0,5 + 0,4 \times 0,5 \times 0,35 = 0,1365 + 0,195 + 0,07 \\ &= 0,4015 \end{aligned}$$

3. a. On a vu que $P(X = 2) = 0,4015$; de plus $P(X = 0)$ et $P(X = 3)$ sont donnés dans le tableau. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 3)) = 1 - (0,1 + 0,4015 + 0,0735) \\ &= 1 - 0,575 = 0,425 \end{aligned}$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,425	0,4015	0,0735

- b. $E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,425 + 2 \times 0,4015 + 3 \times 0,0735 = 1,4485$
 c. Sur 3 tirs, le joueur atteindra sa cible, en moyenne, 1,5 fois.

Partie B

On considère N , un entier naturel supérieur ou égal à 1. Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes. Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible. On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.

- a. L'expérience élémentaire consiste à voir si une personne est gagnante (avec une probabilité $p = 0,0735$) ou non; il n'y a donc que deux issues. On effectue cette expérience élémentaire 15 fois dans des conditions identiques et indépendantes. Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de gagnants sur 15 personnes, suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,0735$.
 b. La probabilité qu'exactly 5 joueurs soient gagnants à ce jeu est :

$$P(Y = 5) = \binom{15}{5} \times 0,0735^5 \times (1 - 0,0735)^{15-5} \approx 0,003$$

2. On cherche le nombre minimum n de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98, c'est-à-dire tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,98$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) \geq 0,98 &\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0,98 \Leftrightarrow 0,02 \geq P(Y = 0) \\ &\Leftrightarrow 0,02 \geq \binom{n}{0} \times 0,0735^0 \times (1 - 0,0735)^{n-0} \Leftrightarrow 0,02 \geq 0,9265^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,02) \geq \ln(0,9265^n) \Leftrightarrow \ln(0,02) \geq n \times \ln(0,9265) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,9265)} \leq n \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,9265)} \approx 51,24 \text{ donc } n = 52.$$